UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
ESCOLA PAULISTA DE POLÍTICA, ECONOMIA E NEGÓCIOS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ATUARIAIS
GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ATUARIAIS

MATHIAS DOS SANTOS COSTA

O MODELO DE BLACK SCHOLES:
UMA ABORDAGEM PRÁTICA DA INTEGRAL DE ITÔ

Osasco
2020

MATHIAS DOS SANTOS COSTA

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de São Paulo como parte das exigências para obtenção do título de bacharel em Ciências Atuariais.

Orientador: Prof. Dr. Raphael Garcia

Aprovado em: ___/___/___

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Raphael de Oliveira Garcia – UNIFESP / Osasco – Orientador

____

Profa. Dra. Graciele P. Silveira – UFSCar / Sorocaba

Osasco

2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Unifesp Osasco
e Departamento de Tecnologia da Informação Unifesp Osasco,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C837m COSTA, Mathias dos Santos
O modelo de black scholes: uma abordagem prática da integral de Itô / Mathias dos Santos Costa. - 2020.
42 f. :il.

Trabalho de conclusão de curso (Ciências Atuariais) - Universidade Federal de São Paulo - Escola Paulista de Política, Economia e Negócios, Osasco, 2020.
Orientador: Raphael Garcia.

1. Ciência atuarial. 2. Derivativos Black Scholes. 3. Equações diferenciais estocásticas. 4. Precificação de derivativos. I. Garcia, Raphael, II. TCC - Unifesp/EPPEN. III. Título.

CDD: 368.01

Dedicatória

Agradeço e dedico este trabalho à toda minha família, em especial Matheus, Maria, Lorete e Nelson. Quero também dedicar este trabalho ao meu grande amigo Alan Miron (in memoriam), que sempre nos encantou com a sua paixão pelas ciências atuariais.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a minha família por todo suporte me dado ao longo da vida. Em especial meus irmãos Matheus e Maria, pois sem eles este trabalho teria seu valor reduzido.

Agradeço a Unifesp, que em meio a tantas adversidades sempre forneceu uma educação de qualidade.

Agradeço aos meus queridos amigos Marco, Ana Aguiar, Victor e Willian, que tornaram as longas jornadas de volta para casa em verdadeiras excursões do conhecimento. Ao longo de todos esses anos da graduação foi possível compartilharmos sonhos, angústias, emoções e conhecimentos. Sem vocês talvez eu jamais teria chegado até aqui.

Agradeço a Joyce, por todo seu carinho, companheirismo e suporte. Muito obrigado por me apoiar todos os dias.

Agradeço a todo corpo docente da Unifesp, meus amigos e colegas de turma.

Por fim, agradeço ao Prof. Dr. Raphael, por ter aceitado me orientar e dedicado o seu valioso tempo acompanhando o desenvolvimento deste trabalho.

“Life is complicated, but not uninteresting”

(Jerzy Neyman)

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo analisar o modelo de precificação de derivativos Black Scholes, que é uma aplicação direta da Integral de Itô, ou seja, uma equação diferencial parcial estocástica. Estudamos um modelo simples para o valor de um ativo que se comporta como um movimento browniano, que não tem solução através dos métodos clássicos de integração, e por isso, introduzimos a Integral de Itô, que é a teoria de integração que nos possibilita encontrarmos o modelo de Black Scholes. Após a implementação computacional do modelo, utilizamos dados da B3 (Bolsa de Valores de São Paulo) para simularmos o preço de opções de compra e venda de ativos financeiros. Diante das respostas e dos resultados obtidos pela execução do modelo comparações gráficas foram realizadas, o que nos permitiu concluir que a Integral de Itô é uma ferramenta eficaz para solução de equações diferenciais estocásticas.

Palavras-chave: opções europeias; black-scholes; equações estocásticas; precificação de derivativos.

Abstract

The present work aims to analyze the Black Scholes derivative pricing model, a direct application of the Ito Integral, that is, a stochastic partial differential equation. We studied a simple model for the value of an asset that behaves like a Brownian movement, which has no solution through the classic integration methods, and for this reason we introduced the Integral of Itô, which is the integration theory that allows us to find the model Black Scholes. Using our model, we use data from B3 (São Paulo Stock Exchange) to simulate the price of options to buy and sell financial assets. Through the answers obtained, we make graphical comparisons of the results, which allows us to conclude that Integral de Itô is an effective tool for solving stochastic differential equations.

Keywords: european options; Black-Scholes; stochastic equations; derivative pricing

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1. Introdução

O presente trabalho tem como tema escolhido a área matemática de finanças, mais especificamente, aborda a aplicação da integral de Itô na resolução da equação de Black-Scholes, que modela precificações de opções europeias que não pagam dividendos.

Desde a virada do século XXI os derivativos, instrumentos financeiros derivados do preço de outros ativos, têm sido responsáveis por grande parte do crescimento dos mercados financeiros ao redor do mundo. As operações mais simples de derivativos já existem há muito tempo. Segundo Stewart (2013), negociantes japoneses de arroz já negociavam uma quantidade fixa do produto por um preço pré-definido antes mesmo que a colheita fosse feita. Assim, conseguiam se proteger das possíveis variações no preço do arroz. Atualmente, os mercados de derivativos estão disponíveis em praticamente todo o mundo para governos, grandes investidores e em muitos casos também para investidores de varejo. Graças aos avanços da tecnologia, praticamente todo o processo é feito através de canais eletrônicos.

Segundo o último relatório trimestral divulgado pelo BIS [1](Bank for International Settlements, 2019), os valores referenciados dos contratos negociados em mercado de balcão e em bolsa movimentaram cerca de USD 558tri (558 trilhões de dólares estadunidenses).

No Brasil, o mercado de derivativos também é muito importante por ser um seguro contra a desvalorização do real, como a ocorrida entre 1999 e 2002 e a recente alta do dólar iniciada no primeiro semestre de 2019. Os derivativos não protegem somente contra o câmbio, como também são amplamente utilizados pelos investidores, especuladores, instituições financeiras e empresas para evitar perdas advindas do descontrole de taxas de juros, preços de matérias primas, índices de preços da bolsa, opções, e outros instrumentos que possam ser negociados no mercado de bolsa ou de balcão. As opções de ações, que são basicamente o direito de comprar ou vender um determinado ativo por um preço definido em uma data futura, são comumente utilizados na remuneração de executivos de empresas no Brasil e no mundo.

[1] Disponível em: https://stats.bis.org/statx/toc/DER.html

A importância de se estudar a precificação de derivativos é ajudar a mitigar os eventuais riscos decorrentes de operações no mercado financeiro. A falta de gestão de riscos pode ser vista em eventos como a quebra do Banco Barings, que apostou em derivativos de índices da bolsa do Japão; a quebra do *Long Term Capital Management*, que utilizava derivativos precificados utilizando a fórmula de Black Scholes, e precisou de um resgate bilionário; e, por fim, a crise do *subprime* em 2008 que foi causada pela concessão de créditos ruins pelos bancos americanos, pois como descrito por Stewart (2013) eram "promessas de promessas".

A equação de Black Scholes é empregada na precificação de opções com vencimento em $n = N$ e com preço de vencimento X. Quando o preço do ativo subjacente segue um movimento Browniano geométrico, o preço de uma opção do tipo europeia de compra pode ser definido pela fórmula de Black-Scholes. Portanto, a questão a ser considerada é decidir o preço para o derivativo. Segundo Costa (2018), a modelagem em questão envolve um movimento Browniano, considerando que B_t é um ativo de risco no mercado então seu preço é dado por,

$$B_t = B_0 \exp\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma dW_t,$$

onde W_t é um movimento Browniano, μ é a média e σ é a volatilidade.

De acordo com Shiryaev (2008), o primeiro a estudar o modelo de precificação de ativos como um movimento Browniano foi L. Bachelier (1900). Segundo Black e Scholes (1973 apud Spenkle 1961, Ayres 1963, Boness 1964, Samuelson 1965, Baumol, Malkiel, Quandt 1966 e Chen 1970) todos os trabalhos anteriores sobre precificação de derivativos eram expressos em termos de títulos de garantia. Após a publicação do trabalho intitulado *The princing of options and corporate liabilities* produzido por Fischer Black e Myron Scholes, que dizia que se o preço de um ativo está corretamente precificado sob algumas condições consideradas "ideais", que serão descritas mais adiante neste trabalho, o preço de uma opção europeia, que não paga dividendos, irá depender apenas do preço do ativo empregado e do tempo, tornando as demais variáveis constantes.

A equação de Black Scholes é uma Equação Diferencial Estocástica (EDE) e não é resolvida através dos métodos clássicos de Integração, como por exemplo as somas de Riemann, que pode ser interpretada como uma soma de áreas de retângulos aproximantes segundo Stewart (2013). Os autores utilizaram a Integral de Itô, que é apropriada para fenômenos que envolvam aleatoriedade, para modelarem a equação de Black Scholes de acordo com Costa (2018).

Este trabalho tem por objetivo fazer uma abordagem da Equação de Black Scholes e a Integral de Itô. A primeira etapa do trabalho consiste em apresentar um breve histórico do mercado de derivativos e o Lema de Itô, que fundamenta o modelo estudado. De posse da nova ferramenta de Integração, utilizaremos na segunda etapa do trabalho a equação de Black Scholes para precificar opções do tipo europeia e que não pagam dividendos, utilizando dados extraídos da Internet para algumas ações listadas na B3 (bolsa de valores de São Paulo). Por fim, falaremos sobre as controvérsias da equação para precificar ativos no mercado financeiro.

A caracterização da área de estudo escolhida, a origem do mercado de derivativos e da equação de Black Scholes serão detalhadas no Capítulo 2. O Capítulo 3 faz uma abordagem do modelo matemático sobre o tema. No Capítulo 4 serão apresentadas as aplicações da equação e os dados utilizados. O Capítulo 5 ressalta os resultados obtidos no trabalho. Em seguida no Capítulo 6 serão apresentadas as conclusões, e por fim as referências consultadas para a realização deste trabalho.

2. Caracterização da área de estudo

Para este trabalho escolheu-se como objeto de pesquisa a equação de Black Scholes e sua solução através da Integral de Itô, que é amplamente utilizada no mercado financeiro como uma ferramenta para precificar derivativos e opções de commodities, índices, ações, entre outros ativos negociados pelos agentes econômicos.

O mercado financeiro vem se modernizando constantemente ao longo do tempo, mais especificamente o mercado de derivativos. Desde a fundação da *Chicago Board of Trade* (CBOT), em 1848, até os dias de hoje, os mercados de derivativos têm sido fundamentais para o gerenciamento de riscos das empresas, governos e famílias. Segundo Hull (2011), embora os contratos de opções já fossem negociados antes de 1973, foi após a fundação da CBOE (Chicago Board Options Exchange) que foi possível padronizar diversos tipos de contratos em uma única bolsa e hoje já é possível negociar opções de mais de 2500 empresas diferentes através da sua plataforma de *trading*. Diante desse cenário, faz-se necessária uma abordagem do uso das ferramentas matemáticas para o gerenciamento de riscos nesses mercados.

2.1 Breve histórico do Mercado de Derivativos

Segundo Stewart (2013) foi no Japão feudal, durante o período Edo, que surgiram as primeiras operações com derivativos, muito parecidas com o hoje chamado mercado a termo. Os grandes produtores rurais e os senhores feudais, que dependiam da agricultura, precisavam de mecanismos que fossem capazes de manter sua renda, tendo em vista que a agricultura pode ser castigada por eventos alheios à vontade humana, como o clima e outros fatores.

Essa necessidade de proteção da renda, estimulou o envio do excedente de arroz para os principais centros econômicos do Japão, Osaka e Tóquio, onde a mercadoria poderia ser armazenada e vendida no futuro, por um preço mais elevado.

Se o preço do arroz na data combinada for menor do que o preço negociado no mercado de arroz, o produtor que fez um contrato de derivativo vende por um preço maior do que o mercado, obtendo lucro na operação. Se o preço no mercado for maior do que o preço contratado pelo produtor, ele deixa de ganhar, mas ainda assim vende o arroz por um preço que cubra os custos da sua operação e garanta a continuidade do seu negócio.

Isso permitiu aos fazendeiros levantar dinheiro antes mesmo da colheita do arroz, podendo usufruir da alavancagem de suas produções. Neste cenário os especuladores viram a oportunidade de ganharem dinheiro, e são os especuladores que garantem a funcionalidade da operação, eles (quem não tem interesse, nem necessidade de estocar arroz ou qualquer outra *commodity)* compram e vendem derivativos com o intuito de obter lucro, mas também podem amargar grandes prejuízos, o que garante liquidez e diminui os riscos das operações para os produtores e suas contrapartes.

2.2 Estrutura do mercado de derivativos

O mercado de derivativos é dividido em quatro tipos diferentes segundo o manual de derivativos da B3 (2015). [2]

No mercado a termo, os compradores ou vendedores se comprometem a comprar ou vender um bem numa data futura por um preço fixado, para liquidação em data futura.

O mercado futuro, por sua vez, pode ser compreendido como uma evolução do mercado a termo. Os compradores ou vendedores se comprometem a comprar ou vender um bem numa data futura por um preço fixado, no entanto, os ajustes são diários de acordo com as expectativas referentes ao preço daquele bem.

O mercado de *swap* é a troca da rentabilidade entre dois ativos. Por exemplo, duas partes podem estabelecer um contrato de *swap* de dólar x taxa prefixada. No vencimento do contrato, se a valorização da taxa prefixada for maior do que a do dólar, quem comprou taxa prefixada e vendeu dólar receberá a diferença. Se a rentabilidade do dólar for maior do que a taxa prefixada, receberá a diferença quem comprou dólar e vendeu a taxa prefixada.

No mercado de opções, negocia-se o direito de compra ou venda de um determinado ativo, por um preço fixo em uma data futura. Quem adquire esse direito paga um valor ao seu vendedor. O presente trabalho fará uma abordagem aplicada a precificação de opções, mais especificamente opções do tipo europeias e que não pagam dividendos.

[2] Disponível em:
http://www.b3.com.br/

As opções são de dois tipos: americanas ou europeias. As opções americanas podem ser exercidas em qualquer momento durante a sua existência, enquanto as europeias só podem ser exercidas na data do seu vencimento.

As opções podem ser negociadas no Mercado de Balcão (*Over the Counter,* conhecido popularmente como OTC). No mercado de balcão, os negócios são feitos especificamente entre as partes para atender demandas específicas de forma bilateral, mas os contratos possuem pouca liquidez, pois são demandas não padronizadas.

2.3 Mercado de Derivativos no Brasil

A partir da década de 1970, os mercados organizados começaram a se desenvolver e o papel das câmaras de compensação passou a assumir o risco das operações entre as partes. Com isso, os contratos passaram a ser padronizados em preços de exercícios, tipo de opção (*put* que dá o direito de venda, ou uma *call* que da o direito de compra) e datas de vencimento.

As opções negociadas em mercado organizado no Brasil acontecem através da B3 e seguem uma padronização de nomenclatura. Por exemplo, o código de 4 dígitos indica o ativo negociado como: PETR, VALE ou MGLU, que são os códigos de negociação das ações da Petrobras, Vale e Magazine Luiza, respectivamente. Em seguida vem uma letra indicando se a opção é do tipo *Call* ou *Put* e, por último, o número indicando o preço de exercício (*Strike price*), que é o preço pelo qual o ativo será transacionado no vencimento. A título de exemplo, uma opção de compra de uma ação da Petrobras, com o preço de exercício de R$26,00 e vencimento em novembro teria o código de negociação dado por PETRK26. Conforme tabela a seguir, extraída do site da empresa ADVFN, que fornece dados de cotações de bolsas de valores do mundo inteiro;

TABELA 1 - NOMECLATURA DE OPÇÕES

Mês de vencimento	Série da Opção de Compra (CALL)	Série da Opção de Venda (PUT)
Janeiro	A	M
Fevereiro	B	N
Março	C	O
Abril	D	P
Maio	E	Q
Junho	F	R
Julho	G	S
Agosto	H	T
Setembro	I	U
Outubro	J	V
Novembro	K	W
Dezembro	L	X

Fonte: ADVFN[3]

Segundo Bachelier um ativo poderia ser precificado da seguinte forma:

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \qquad t \leq T,$$

Em que $W = (W_t)_{t \geq 0}$ é um processo de Wiener padrão, ou seja, um movimento browniano. Somente sete décadas mais tarde seria apresentado um modelo com ampla aceitação do mercado financeiro, quando os economistas Fischer Black e Myron Scholes publicaram em 1973 sua obra *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, em que o modelo será apresentado ao longo deste trabalho. Diante desse cenário surge o seguinte desafio: "Como saber o preço de uma opção passado um período após a sua compra e antes do seu vencimento?"

[3] Disponível em https://br.advfn.com/investimentos/opcoes/codigo-bovespa

3. Modelo Matemático

Introduziremos, neste capítulo, o modelo simples para um valor de um ativo que se comporta como um passeio aleatório, faremos uma abordagem sobre o Lema de Itô, que é peça fundamental para resolvermos a equação de Black Scholes. O cálculo de Itô é utilizado para modelar e resolver problemas que envolvam aleatoriedade. E por fim, faremos uma introdução da equação de Black Scholes.

3.1 Modelo simples para o valor de um ativo

O preço de um ativo deve seguir uma aleatoriedade por conta da hipótese de que os mercados são eficientes, ou seja, os investidores sempre reagem prontamente a uma nova informação e impossibilitam a oportunidade de arbitragem dos preços. Assumindo que a hipótese é verdadeira, preços dos ativos seguem um processo de cadeia de Markov (WILMOTT, HOWISON, DWEYNNE, 2009). Assim, toda a história passada esta inclusa no preço de um ativo que não contém nenhuma informação sobre o futuro, e que os mercados respondem prontamente a qualquer nova informação.

Este modelo considera que o retorno dos ativos é descomposto em duas partes, uma determinística e outra estocástica devido aos movimentos aleatórios típicos dos mercados financeiros.

Suponha que uma pequena mudança no preço de um ativo durante um intervalo de tempo dt , no qual um acréscimo em S é representado como $S + dS$. O retorno de um ativo financeiro é dado pela alteração definida pela mudança no preço original. Assim, a parte determinística do retorno é dada por:

$$\mu dt, \tag{1}$$

comumente conhecido como termo à deriva (*drift term)*. Em que μ é uma constante.

A contribuição aleatória dos retornos é dada por:

$$\sigma dX_t, \tag{2}$$

Em que σ é a volatilidade do ativo, que é a medida de desvio padrão.

A partir das expressões (1) e (2), determina-se a equação diferencial estocástica (3). A equação (3) é um modelo matemático que descreve o retorno de um ativo em dado período t:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma dX_t + \mu dt \tag{3}$$

Quando μ é constante e $\sigma = 0$, o preço do ativo pode ser dado pelo crescimento exponencial do preço do ativo

$$S = S_0 e^{\mu(t-t_0)}, \tag{4}$$

onde S_0 é o preço do ativo no instante $t = t_0$. Ou seja, o retorno do ativo é determinístico.

O termo dX contém o elemento aleatório dos preços dos ativos, é também conhecido como Processo de Wiener ou movimento browniano, que foi usado na física para descrever choques moleculare. O processo de Wiener possui as seguintes propriedades Hull (2011):

1. A mudança de Δz durante um período curto Δt é:

$$\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t}$$

Em que $\boldsymbol{\epsilon}$ segue uma distribuição normal padrão $\Phi(0,1)$.

2. Os valores de Δz para quaisquer dois intervalos curtos de tempo diferentes Δt, são independentes.

Logo a primeira propriedade implica que Δz segue uma distribuição normal com média 0 e variância 1. E a segunda propriedade implica que z segue um processo de Markov.

Dada a dinâmica do mercado de ações, em que as operações ocorrem instantaneamente em meios eletrônicos, faz-se necessária uma maneira replicável e sistemática de calcular o preço de negociação de uma opção para um mercado muito grande e cada vez mais complexo. Foi a partir dessa necessidade que surgiu a equação de Black Scholes, que envolve cinco grandezas distintas: tempo, preço da mercadoria, preço do derivativo, taxa de juros livre de risco e a volatilidade do ativo. Uma equação diferencial parcial de segunda ordem, que será apresentada com mais detalhes no Capítulo 3.

A equação de Black Scholes assume que os retornos percentuais dos ativos financeiros se comportam estatisticamente como um movimento browniano, que a taxa de oscilação e a volatilidade do mercado são constantes.

O movimento Browniano foi descrito pela primeira vez por um botânico chamado Robert Brown. Ele buscava compreender o motivo de uma partícula de pólen se comportar de forma caótica dentro de um copo de água. Por definição um movimento Browniano padrão $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_t)_{\,t\geq 0}$ é um processo Gaussiano contínuo com incrementos independentes $\mathcal{B}_0 = 0$, $\mathbb{E}\mathcal{B}_t = 0$ e $\mathbb{E}\mathcal{B}_t^2 = t$, como visto em Shiryaev (2011). O conceito matemático do movimento browniano foi descrito pela primeira vez por L. Bachelier (1900) e A. Einstein (1905). Também é conhecido como processo de Wiener, recomenda-se N. Winer (1923) para uma descrição detalhada do assunto.

Para resolver equações diferenciais estocásticas, não podemos utilizar as técnicas clássicas de integração, como as somas de Riemann, por exemplo. As equações diferenciais estocásticas contam com o elemento da aleatoriedade, dessa forma, não podemos ignorar as variações envolvidas em um processo estocástico. Em 1944, Itô realizou um grande avanço em ferramentas para solucionar equações diferenciais estocásticas (SHIRYAEV 2011).

3.2 Lema de Itô

O Lema de Itô é o resultado mais importante na área de finanças matemáticas, especificamente quando trabalhamos com derivativos (WILMOTT; HOWISON; DWEYNNE, 2009). O Lema de Itô é resultado de derivações de outros resultados mais simples, neste caso será utilizado a expansão de Taylor para a demonstração do Lema de Itô. Antes de iniciar a demonstração iremos assumir o seguinte resultado

$$dX^2 = dt. \tag{5}$$

Ou seja, embora o movimento browniano tenha uma trajetória ilimitada, poderemos utilizar a igualdade vista em (5) para demonstrarmos o Lema de Itô. Para uma demonstração detalhada ver (SHIRYAEV, 2011). Seguiremos aqui o desenvolvimento encontrado em (WILMOTT; HOWISON; DWEYNNE, 2009).

Demonstração.

Suponha que $f(S)$ é uma função diferenciável em S. Uma pequena variação de S em razão de dS fará com que f também varie. Então, utilizando a expansão em série de Taylor teremos:

$$df = \frac{\mathrm{df}}{dS}dS + \frac{d^2 f}{2dS^2}dS^2 + \frac{d^3 f}{6dS^3}dS^3 + \cdots \tag{5.1}$$

Vamos voltar em dS dado na equação (3) antes de prosseguirmos com a expansão em série de Taylor. Trabalharemos com a equação na forma quadrática, ou seja

$$dS^2 = (\sigma S dX + \mu S dt)^2 \tag{5.2}$$
$$= (\sigma S dX)^2 + 2\sigma S^2 dt dX + (\mu S dt)^2$$

Se observamos o comportamento assintótico dos termos (5.2), podemos verificar que o primeiro termo fica maior quanto menor for dt, assim podemos ignorar os demais termos. Dessa forma temos,

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dX^2. \tag{5.3}$$

E substituindo (5) em (5.3) teremos

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dt. \tag{5.4}$$

Retornando a nossa expansão em série de Taylor em (5.1) e substituindo (5.4) nela, nós teremos agora a seguinte equação

$$df = \frac{df}{dS}(\sigma S dX + \mu S dt) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2}dt$$

$$= \sigma S \frac{df}{dS} dX + \left(\mu S \frac{df}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2}\right)dt. \tag{5.5}$$

Este é o Lema de Itô aplicado para a equação em (3) com a variável aleatória S. O Lema de Itô pode ser aplicado para funções descritas por qualquer variável aleatória que seja modelada como uma equação diferencial estocástica (WILMOTT; HOWISON; DWEYNNE, 2009, p. 27).

3.3 Modelo de Black - Scholes

A equação é baseada em algumas premissas fundamentais para o seu entendimento e sua aplicação as quais listamos a seguir, são eles (WILMOTT; HOWISON; DWEYNNE, 2009):

- Taxa livre de riscos é conhecida e constante para todos os vencimentos
- Os mercados operam continuamente
- É possível vender as ações sem detê-las
- Não existem custos de transação (os ativos são negociados livremente)
- Não existe oportunidade para arbitragem
- Não há pagamento de dividendos durante a duração do contrato
- Os preços dos ativos subjacentes possuem uma distribuição log-normal com média e variância constantes. Os preços das ações não dependem do preço observado no momento anterior, e por isso, não existe um movimento padrão que possa ser previsto.

Retornando à equação (3) e adotando σ e μ como constantes. A função f é o preço de compra de uma opção, que depende das varáveis aleatórias do preço S e do tempo t. Então, aplicando o Lema de Itô (5.5) visto na seção anterior, teremos

$$df = \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dX + (\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^S} + \frac{\partial f}{\partial t}) dt \tag{6}$$

À equação (6) descreve o passeio aleatório dado por f.

A equação diferencial de Black Scholes supõe montar um portfólio livre de risco, no qual alocaremos posições em ações e derivativos. A ideia de montar um portfólio livre de risco é que a incerteza recai sobre o preço do ativo e o preço do derivativo (Hull 2011).

Então construindo um portfólio com 1 opção e um número $-\Delta$ de ativos, o valor do nosso portfólio é dado por

$$I = f - \Delta S. \tag{6.1}$$

Uma mudança ΔI no valor do portfólio em um intervalo de tempo Δt é

$$dI = df - \Delta \mathrm{d}S$$

Então juntando as expressões dadas em (3), (6) e (6.1) chegaremos a conclusão de que I segue um passeio aleatório

$$dI = \sigma S\left(\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta\right)dX + \left(\mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^S} + \frac{\partial f}{\partial t} - \mu\Delta S\right)dt. \tag{6.2}$$

Ao adotar $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$ faremos com que dX desapareça da equação (6.2), assim eliminando o elemento de aleatoriedade. Logo,

$$dI = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^S} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)dt. \tag{6.3}$$

Como vimos no início dessa seção, é pressuposto no modelo de Black Scholes que não haja custos de transação e também não haja oportunidade de arbitragem, assim, um investidor que investisse uma quantidade I em um ativo livre de riscos r, veria seu investimento crescer $rIdt$ no período de tempo dt. Com essa inexistência de arbitragem teremos

$$rIdt = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^S} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)dt. \tag{6.4}$$

Ao substituir (6.1) e adotar $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$ em (6.4) temos

$$\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^S} + rS\frac{\partial f}{\partial t} - rV = 0 \tag{6.5}$$

A expressão (6.5) é a equação de Black Scholes para precificação de opções europeias que não pagam dividendos.

De posse da equação (6.5), vamos definir condições limites para solucionarmos nossa equação de Black Scholes. Para uma opção de compra do tipo europeia, denotada por $C(S,t)$, onde X é preço de exercício (Strike) e T a data de vencimento da opção, a condição limite é

$$C = \max(S - X, 0), \qquad t = T$$

No caso de uma opção de venda europeia $P(S,t)$ é dado por,

$$P = \max(X - S, 0), \qquad t = T$$

Sabendo que os retornos compostos continuamente do preço de uma ação seguem uma distribuição normal, teremos como solução da equação diferencial a seguinte fórmula vista em (7) para precificarmos opção europeias sem pagamento de dividendos, onde X é o preço de exercício, T é o vencimento da opção, a taxa de juros livre de risco é r e a volatidade é representada por σ. Utilizaremos um resultado fundamental conforme visto em Hull (2011), ver (HULL, 2011) para uma demonstração detalhada. Quando σ e r são constantes, temos a seguinte solução para opções europeias que não pagam dividendos

$$C(S,t) = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{7}$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{X} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \tag{8}$$

e,

$$d_2 = d_1 - \sqrt{T - t} \tag{9}$$

Este é o resultado de Black Scholes.

De posse da equação (7), é necessário primeiro entender $N\,(d_1)$ e $N(d_2)$ para interpretar a equação de Black Scholes. A expressão $SN(d_1)e^{-rT}$ é o preço esperado da ação no tempo T em um cenário onde as preferências de riscos dos investidores não alteram o resultado da equação. O termo $N(d_2)$ é a probabilidade da opção de compra ser exercido no cenário onde o retorno esperado para todos os investimentos é a taxa de juros livre de risco r. O preço de exercício somente será pago se o preço da ação for maior do que K, que tem uma probabilidade $N(d_2)$ de ocorrer (HULL, 2011). Assim, o resultado esperado quando a taxa de juros é o retorno esperado para todos os investimentos será

$$SN(d_1)e^{-r(T-t)} - KN(d_2). \tag{10}$$

Com essas informações, seremos capazes de encontrar o preço de uma opção de compra ou venda, do tipo europeia e que não pagam dividendos, como veremos no Capítulo 4.

4. Aplicações

Este capítulo concentra-se em aplicar a equação de Black Scholes para precificação de opções europeias, que não pagam dividendos, utilizaremos dados extraídos da B3 para as ações da MGLU3, PETR4 e VALE3. Os dados foram modelados utilizando o software R e foram obtidos através do sistema Market Data da B3[4]. Vamos apresentar a terminologia dos termos utilizados, apresentar os dados em tabelas e os gráficos gerados através dos resultados obtidos.

Conforme visto no Capítulo 3, o modelo de Black Scholes nos permite precificar opções europeias que não distribuem dividendos sob certas premissas que devem ser adotadas no modelo. Também observamos que em posse da equação de Black Scholes encontramos uma maneira sistemática e replicável de precificar opções. Antes, iremos ilustrar os principais termos utilizados

Terminologia

- Opção – Um ativo que dá o direito de compra ou venda de um ativo sob certas condições de prazo e um preço pré-definido.
- Opção de Compra/Call option – O direito de comprar um ativo por um preço pré-determinado.
- Opção de venda/Put option – O direito de vender um ativo por um preço pré-determinado.
- Opção Americana – Esse tipo de opção pode ser exercido em qualquer momento, inclusive na data de vencimento.
- Opção Europeia – Esse tipo de opção só pode ser exercido na data de vencimento.
- Data de vencimento T: É a data em que o direito de compra ou venda, dará o direito do seu detentor de exercer sua opção. Caso não se realize o direito, a opção expira e não tem mais valor nenhum.
- Preço de Exercício X: O preço de exercício de uma opção possui valor intrínseco que é a diferença do ativo na data de vencimento e o preço de exercício.
- Volatilidade σ: É uma medida que nos diz o quanto o preço de um ativo se distancia da média. No modelo de Black Scholes a volatilidade é tida como

[4] Disponível em http://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/consultas/mercado-a-vista/volatilidades-dos-ativos/

constante. Mas como visto em Maristela (2011), podemos descrever o comportamento do preço das opções em mercados mais complexos.

- Taxa livre de risco r: É a taxa de juros dos investidores que são avessos a risco. Na economia brasileira a taxa livre de riscos é a Selic.
- Preço do ativo no tempo zero S_0: Preço inicial do ativo financeiro.

Utilizaremos a fórmula (7) vista na Seção 3.3 do Capítulo 3 para precificarmos opções do tipo europeias e que não pagam dividendos. Faremos a substituição dos parâmetros diretamente na equação de Black Scholes e veremos graficamente como esses parâmetros alteram o preço das opções. Para $N(x)$ é necessária uma tabela da função de distribuição normal acumulada ou utilizar softwares estatísticos que façam esta função. Para este trabalho foi utilizado o software RStudio.

4.1 Alterando o preço alvo do ativo

Utilizaremos o ativo PETR4 com o preço inicial S_0 de R\$ 17,7, preço de strike X da opção em R\$25,00, a taxa de juros livre de riscos r de 2,25% a.a, volatilidade anualizada σ de 61,51% e T igual a 6 meses até o vencimento. Substituindo em (7), temos

$$C(S,t) = 17{,}7N(d_1) - e^{-0{,}0225(0{,}5)}25N(d_2). \tag{11}$$

Para encontrar $N(d_1)$ e $N(d_2)$, teremos

$$d_1 = \frac{\ln\frac{17{,}7}{25} + \left(0{,}0225 + \frac{1}{2}0{,}6151^2\right)(0{,}5)}{0{,}6151\sqrt{0{,}5}} = -0{,}1943 \tag{12}$$

e,

$$d_2 = -0{,}1943 - \sqrt{0{,}5 =}- 0{,}1943 - 0{,}4349 = -0.6292 \tag{13}$$

e,

$$e^{-0{,}0225(0{,}5)}25 = 24{,}72. \tag{14}$$

Substituindo (12), (13) e (14) em (11) segue que,

$$C(S,t) = 17{,}7N(-0{,}1943) - 24{,}72N(-0{,}6292). \qquad (15)$$

Então o resultado para uma opção de compra C é

$$C(S,t) = 0{,}9457.$$

Analogamente, para encontrar o preço da opção de venda P, temos

$$P(S,t) = e^{-r(T-t)}25N(d_1) - 17{,}7N(d_2), \qquad (16)$$

Substituindo os resultados de (12), (13) e (14) em (16), encontramos o preço de uma opção de venda P,

$$P(S,t) = 5{,}7725.$$

Aplicando o mesmo procedimento visto acima para diferentes preços S, encontramos os seguintes resultados para os preços de compra *call* e de venda *put* conforme a Tabela 2;

TABELA 2 - DADOS DA AÇÃO PETR4

Ticker	S	X	s	r	t	call	put
PETR4	17.7	25	61.51%	2.25%	0.5	0.9457	5.7725
PETR4	18.2	25	61.51%	2.25%	0.5	1.1244	5.7584
PETR4	18.7	25	61.51%	2.25%	0.5	1.3126	5.7285
PETR4	19.2	25	61.51%	2.25%	0.5	1.5103	5.6832
PETR4	19.7	25	61.51%	2.25%	0.5	1.7172	5.6228
PETR4	20.2	25	61.51%	2.25%	0.5	1.933	5.5475
PETR4	20.7	25	61.51%	2.25%	0.5	2.1576	5.4578
PETR4	21.2	25	61.51%	2.25%	0.5	2.3907	5.3541
PETR4	21.7	25	61.51%	2.25%	0.5	2.632	5.2365
PETR4	22.2	25	61.51%	2.25%	0.5	2.8815	5.1056
PETR4	22.7	25	61.51%	2.25%	0.5	3.1388	4.9617
PETR4	23.2	25	61.51%	2.25%	0.5	3.4038	4.805
PETR4	23.7	25	61.51%	2.25%	0.5	3.6762	4.636
PETR4	24.2	25	61.51%	2.25%	0.5	3.9558	4.455
PETR4	24.7	25	61.51%	2.25%	0.5	4.2424	4.2623
PETR4	25.2	25	61.51%	2.25%	0.5	4.5358	4.0583
PETR4	25.7	25	61.51%	2.25%	0.5	4.8358	3.8432
PETR4	26.2	25	61.51%	2.25%	0.5	5.1422	3.6175
PETR4	26.7	25	61.51%	2.25%	0.5	5.4549	3.3815
PETR4	27.2	25	61.51%	2.25%	0.5	5.7735	3.1354
PETR4	27.7	25	61.51%	2.25%	0.5	6.0981	2.8795
PETR4	28.2	25	61.51%	2.25%	0.5	6.4282	2.6142
PETR4	28.7	25	61.51%	2.25%	0.5	6.7639	2.3397

O preço do ativo alvo altera diretamente o preço da opção, podemos ver na Figura 1 que quanto maior o preço do ativo, maior o preço da opção de compra. Já para o caso das opções de venda, o efeito é o inverso. Então, como visto na tabela, quando o preço do ativo está em R$23,70 o preço da *call* é precificado em R$3,6762. Se esse fosse o preço no dia do vencimento da opção, ela não seria exercida, visto que não faz sentido um investidor comprar uma ação por R$25,00 quando ela custa R$23,70. Caso o investidor tivesse adquirido uma *put* nas mesmas condições, ele pagaria R$4,636 na opção e no vencimento obteria um resultado financeiro de R$25 menos o preço da ação no dia do vencimento, R$ 23,7, ou seja R$ 1,30.

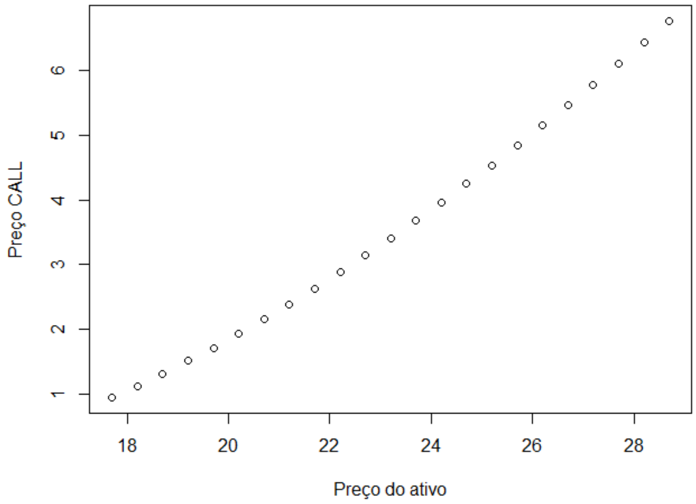

FIGURA 1 - GRÁFICO DO PREÇO DA OPÇÃO DE COMPRA DE PETR4 EM RELAÇÃO AO PREÇO DO ATIVO SUBJACENTE

Podemos observar graficamente na Figura 2 o comportamento das opções de venda *put*. Teremos um comportamento inverso ao das *calls*, quanto maior o preço do ativo em relação ao preço de exercício, menor o valor da *put*.

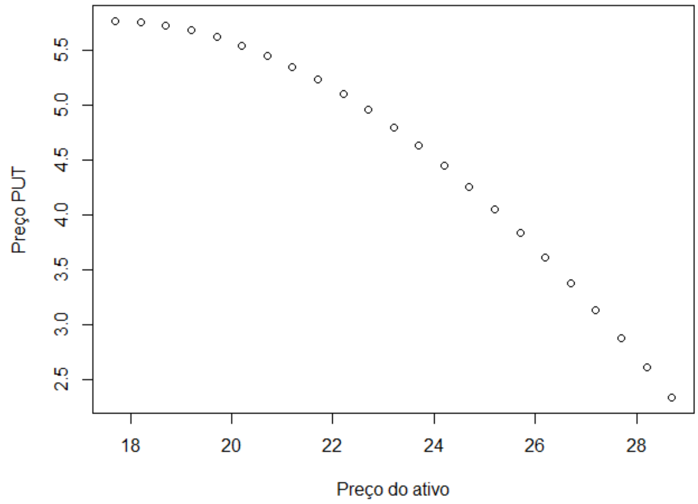

FIGURA 2 - GRÁFICO DO PREÇO DA OPÇÃO DE VENDA DE PETR4 EM RELAÇÃO AO PREÇO DO ATIVO SUBJACENTE

4.2 Alterando a volatidade do ativo

Outro fator determinante na hora de precificar uma opção é a volatidade σ do ativo. Utilizando agora o ativo MGLU3, com preço de exercício X em R$59,00, com σ de 69,94%, r de 2,25% e período T também de 6 meses. Teremos os seguintes resultados na Tabela 3. Na Figura 3 também podemos observar graficamente o comportamento da opção de compra (*call*) do ativo MGLU3 com os parâmetros destacados anteriormente.

TABELA 3 - DADOS DA AÇÃO MGLU3

Ticker	S	X	s	r	t	call	put
MGLU3	51.75	59	69.94%	2.25%	0.5	11.9198	17.8398
MGLU3	52.25	59	69.94%	2.25%	0.5	12.2082	17.6861
MGLU3	52.75	59	69.94%	2.25%	0.5	12.4994	17.5243
MGLU3	53.25	59	69.94%	2.25%	0.5	12.7932	17.3545
MGLU3	53.75	59	69.94%	2.25%	0.5	13.0897	17.1767
MGLU3	54.25	59	69.94%	2.25%	0.5	13.3888	16.9911
MGLU3	54.75	59	69.94%	2.25%	0.5	13.6905	16.7979
MGLU3	55.25	59	69.94%	2.25%	0.5	13.9947	16.597
MGLU3	55.75	59	69.94%	2.25%	0.5	14.3015	16.3887
MGLU3	56.25	59	69.94%	2.25%	0.5	14.6108	16.1731
MGLU3	56.75	59	69.94%	2.25%	0.5	14.9225	15.9503
MGLU3	57.25	59	69.94%	2.25%	0.5	15.2367	15.7203
MGLU3	57.75	59	69.94%	2.25%	0.5	15.5532	15.4833
MGLU3	58.25	59	69.94%	2.25%	0.5	15.8722	15.2395
MGLU3	58.75	59	69.94%	2.25%	0.5	16.1934	14.9889
MGLU3	59.25	59	69.94%	2.25%	0.5	16.517	14.7316
MGLU3	59.75	59	69.94%	2.25%	0.5	16.8428	14.4678
MGLU3	60.25	59	69.94%	2.25%	0.5	17.1709	14.1976
MGLU3	60.75	59	69.94%	2.25%	0.5	17.5012	13.921
MGLU3	61.25	59	69.94%	2.25%	0.5	17.8337	13.6382
MGLU3	61.75	59	69.94%	2.25%	0.5	18.1684	13.3493
MGLU3	62.25	59	69.94%	2.25%	0.5	18.5051	13.0543
MGLU3	62.75	59	69.94%	2.25%	0.5	18.844	12.7535

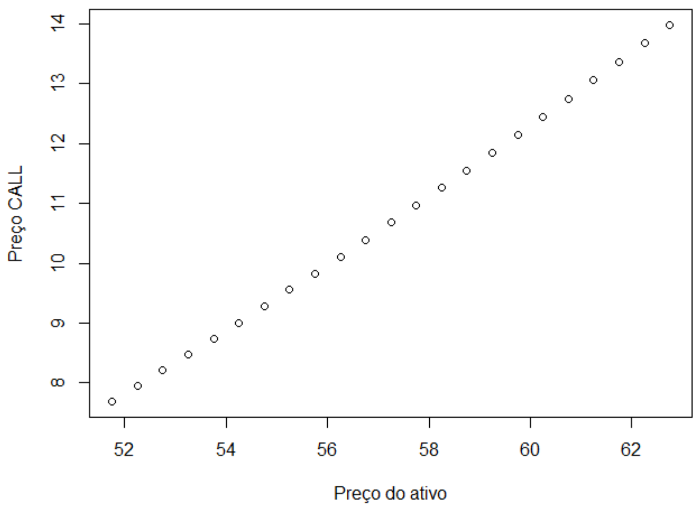

FIGURA 3 – GRÁFICO DO PREÇO DA OPÇÃO DE COMPRA DE MGLU3 EM RELAÇÃO AO ATIVO SUBJACENTE

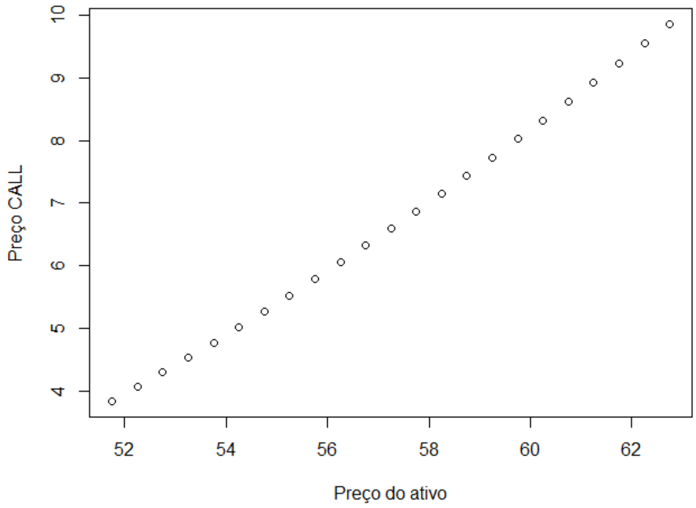

FIGURA 4 - GRÁFICO DO PREÇO DA OPÇÃO DE COMPRA DE MGLU3 COM ALTERAÇÃO DA VOLATIDADE DO ATIVO

Na Figura 4 o preço da opção cai quando alteramos a volatidade σ de 69,94% para 44%, devido ao menor risco embutido no ativo subjacente. Observando as Figuras 3 e 4 podemos concluir que quanto menos volátil o ativo subjacente, menor será o preço das opções de compra (*call*) ou de venda (*put*).

4.3 Alterando o prazo de vencimento do ativo

O prazo de vencimento T também altera o preço de uma opção. No caso a seguir utilizamos o ativo VALE3, com volatilidade σ de 54,29%, taxa de juros livre de risco r de 2,25% a.a, preço de exercício de X de R$60,00 e prazo para o vencimento T de 6 meses. Vemos os resultados na Tabela 4 e os gráficos das opções de compra na Figura 5 e de venda na Figura 6 a seguir;

TABELA 4 - DADOS DA AÇÃO VALE3

Ticker	S	X	s	r	t	call	put
VALE3	43.26	60	54.29%	2.25%	0.5	1.6692	12.691
VALE3	44.06	60	69.94%	2.25%	0.5	1.936	12.6733
VALE3	44.86	60	69.94%	2.25%	0.5	2.2141	12.637
VALE3	45.66	60	69.94%	2.25%	0.5	2.5036	12.5823
VALE3	46.46	60	69.94%	2.25%	0.5	2.8041	12.5093
VALE3	47.26	60	69.94%	2.25%	0.5	3.1156	12.4183
VALE3	48.06	60	69.94%	2.25%	0.5	3.4379	12.3095
VALE3	48.86	60	69.94%	2.25%	0.5	3.7708	12.1831
VALE3	49.66	60	69.94%	2.25%	0.5	4.1142	12.0394
VALE3	50.46	60	69.94%	2.25%	0.5	4.468	11.8786
VALE3	51.26	60	69.94%	2.25%	0.5	4.8319	11.701
VALE3	52.06	60	69.94%	2.25%	0.5	5.2057	11.5068
VALE3	52.86	60	69.94%	2.25%	0.5	5.5894	11.2964
VALE3	53.66	60	69.94%	2.25%	0.5	5.9827	11.07
VALE3	54.46	60	69.94%	2.25%	0.5	6.3854	10.8278
VALE3	55.26	60	69.94%	2.25%	0.5	6.7975	10.5701
VALE3	56.06	60	69.94%	2.25%	0.5	7.2186	10.2973
VALE3	56.86	60	69.94%	2.25%	0.5	7.6488	10.0096
VALE3	57.66	60	69.94%	2.25%	0.5	8.0877	9.7072
VALE3	58.46	60	69.94%	2.25%	0.5	8.5352	9.3905
VALE3	59.26	60	69.94%	2.25%	0.5	8.9911	9.0598
VALE3	60.06	60	69.94%	2.25%	0.5	9.4553	8.7152
VALE3	60.86	60	69.94%	2.25%	0.5	9.9276	8.3572

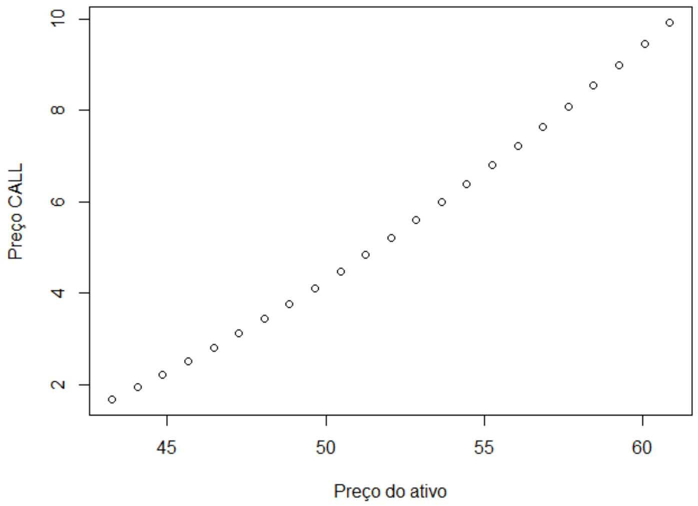

FIGURA 5 - GRÁFICO DO PREÇO DA OPÇÃO DE COMPRA DE VALE3 EM RELAÇÃO AO PREÇO DO ATIVO SUBJACENTE

Na Figura 5, a representação gráfica do preço de compra do ativo VALE3 mostra que o preço da opção fica mais elevado quanto mais próximo do preço de exercício K, neste caso R$60,00. Isso ocorre devido ao fato da maior possibilidade da opção de compra ser exercida na data de vencimento.

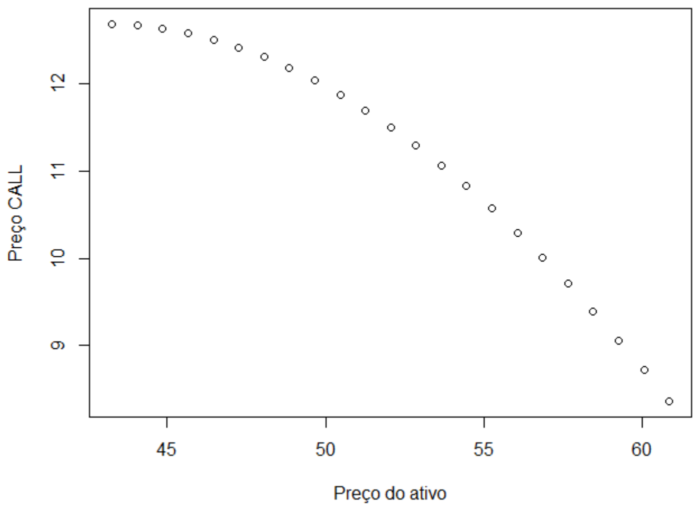

FIGURA 6 – GRÁFICO DO PREÇO DA OPÇÃO DE VENDA DE VALE3 EM RELAÇÃO AO PREÇO DO ATIVO SUBJACENTE

O gráfico da Figura 6 se comporta de forma oposta a Figura 5, quanto mais distante do preço de exercício, maior o preço da opção de venda.

Ao alterar a data de vencimento T para 1 ano e meio, e comparar as Figuras 5 e 6 com as Figuras 7 e 8, que o preço das opções aumenta no eixo do preço da opção, pois reflete as incertezas associadas ao preço da ação no futuro.

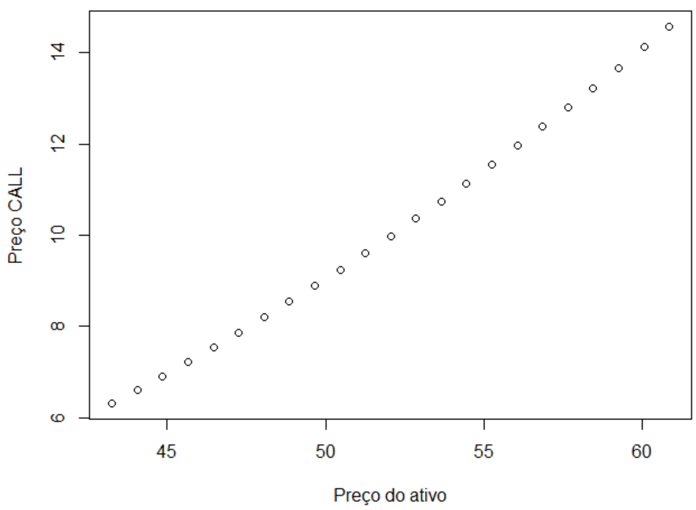

FIGURA 7 – GRÁFICO DO PREÇO DA OPÇÃO DE COMPRA DE VALE3 COM ALTERAÇÃO DA DATA DE VENCIMENTO DO EXERCÍCIO DA OPÇÃO

O gráfico da Figura 7 tem um comportamento igual ao da Figura 5, no entanto, na Figura 7 podemos ver que o preço de compra das ações é mais elevado, o que reflete o maior risco embutido com um prazo de vencimento mais longo para a opção.

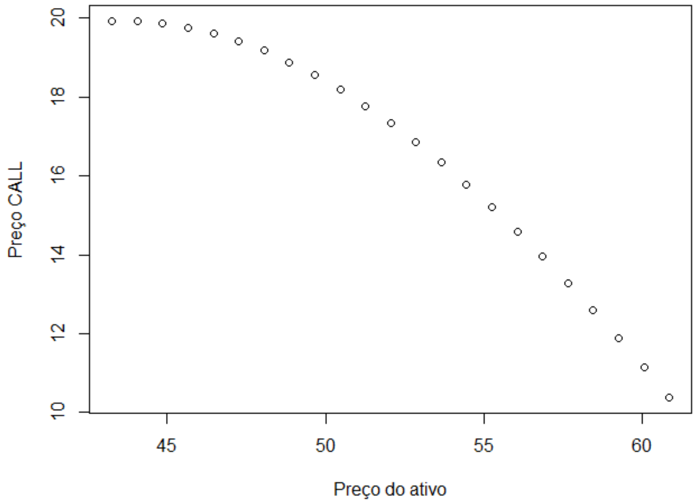

FIGURA 8 - GRÁFICO DO PREÇO DA OPÇÃO DE VENDA DE VALE3 COM ALTERAÇÃO DA DATA DE VENCIMENTO DO EXERCÍCIO DA OPÇÃO

O gráfico da Figura 8 também reflete as incertezas em torno do preço futuro do ativo subjacente. Comparando os gráficos das Figuras 6 e 8,

4.4 Análise dos resultados

O preço e a volatidade do ativo são considerados os dois principais fatores na hora de precificar uma opção, conforme visto em Shiryaev (2011), devido a sua maior imprevisibilidade. A data de vencimento também tem impacto direto na precificação de opção, prazos maiores aumentam a incerteza em torno do preço futuro da ação e são refletidos diretamente no preço da opção.

A taxa livre de riscos também tem um papel importante na precificação de opções. Ela é como um termômetro para medir o apetite de riscos dos investidores. Poderíamos utilizar outras metodologias para encontrar uma taxa livre de riscos que refletisse o mercado brasileiro frente a economia global, mas não é o foco deste trabalho.

5 Conclusões

Este trabalho não teve como objetivo descrever operações possíveis com opções no mercado financeiro e foram utilizadas apenas com caráter explicativo. Este trabalho objetivou ter uma abordagem introdutória da equação de Ito e como ela pode ser aplicada dentro um contexto mais amplo e aplicada em um contexto fora do mundo acadêmico, dado a grande defasagem que existe entre o mercado de trabalho brasileiro e a academia.

Na bibliografia consultada para construção desse trabalho é interessante notar que grande parte dos autores propõem uma abordagem aplicada da equação de Black Scholes. Sua interpretação embora demande um pouco mais de esforço pode ser facilmente interpretada sem um profundo conhecimento da matemática aplicada por trás da sua resolução. O mercado financeiro tem ficado cada vez mais globalizado e o mercado de derivativos é responsável por uma parcela de dinheiro praticamente incalculável, isso aumenta a demanda por profissionais mais capacitados e uma abordagem cada vez mais aprofundada dos instrumentos e métodos utilizados nesses mercados.

O modelo de Black Scholes tem passado por diversas revisões e está sujeito a diversas críticas, como visto em Maristela (2011), o modelo de Black Scholes não se enquadra em mercados incompletos e complexos como é na realidade. A variedade de modelos para precificação de opções tem surgindo ao longo do tempo como o modelo proposto por Cox e Ross (1976), que admite um processo de difusão com elasticidade da variância constante e outros modelos assintóticos ou multi-escala.

O modelo de Black Scholes utilizado nesse trabalho pressupõem que os mercados são perfeitos, não existe distribuição de lucros, ou seja, não há dividendos para as ações e a volatidade é assumida como constante. O objetivo dos autores da fórmula de Black Scholes era encontrar um portfólio que pudesse ser replicado, onde com pouco capital alocado, fosse possível fazer um *heding* de um portfólio de investimentos. Sabe-se da realidade do mercado de ações, então a hipótese de volatidade constante não parece razoável.

Espera-se que o leitor consiga cristalizar uma base fundamental através das análises e resultados obtidos neste trabalho, buscar outras fontes de pesquisas e modelos mais complexos e completos, como no caso de opções com distribuições de dividendos e opções americanas como pode ser visto em Shiryaev (2011) e modelos assintóticos e multi-escala como visto em Maristela (2011).

Por fim, é importante salientar a importância de uma base fundamental solida para que se faça um aproveitamento melhor entre a academia e o mercado de trabalho brasileiro.

Referências

ADVFN (Brasil). Disponível em: < https://br.advfn.com/investimentos/opcoes/codigo-bovespa> Acesso em: 16 jul. 2020.

ANDERSON, D. R.; SWEENEY, D. J. ; WILLIAMS, T. A. **Estatística Aplicada à Administração e Economia**. 3. Ed. São Paulo: CENGAGE LEARNING, 2013.

B3 Site Institucional. Disponível em: <http://www.b3.com.br/pt_br/b3/educacao/cursos/online/derivativos/conceitos-fundamentais/o-que-e-um-derivativo.htm>. Acesso em: 18 set. 2020.

BIS Site Institucional. Disponível em: <https://www.bis.org/> Acesso em:

BLACK, F.; SCHOLES, M. ***The princing of options and corporate liabilities.*** Journal of Political Economy, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973.

BM&FBOVESPA. **Série Introdutória – Mercados Derivativos** – BM&F. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/1818183/mod_resource/content/1/ENS%20-%20MF2%20BMF%202007%20-%20BK%20Introd%20Derivativos.pdf> Acesso em: 16 jul. 2020.

CARVALHO. S.S Maristela. ***Processos de Volatilidade Estocástica e uma Avaliação Sobre a Análise Assintótica Aplicada à Precificação de Opções***, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011. Dissertação (Mestrado profissional em Métodos Matemáticos em Finanças) p. 9-23. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/08/projetos_fim_curso_maristela_carvalho.pdf Acesso em: 31 ago. 2020.

COSTA, Gustavo Nascimento. ***Equações Diferenciais Estocásticas Backward: Uma Aplicação em Finanças*****.** 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 2018. p. 12-34. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/331698/1/Costa_GustavoDoNascimento_M.pdf. Acesso em: 31 ago. 2020.

CVM e a BM&FBOVESPA. **TOP - Mercado de Valores Mobiliários Brasileiro**, Ed. Rio de Janeiro: BM&F Brasil, 2015

FORTUNA, Eduardo. **Mercado Financeiro: produtos e serviços**, 103 edição. Rio de Janeiro: Qualitymark, 1997.

HULL, John. **Opções futuros e outros derivativos**. 9. Ed. Bookman, 2016.

NETO, Lauro AS. **Derivativos: Definições, Emprego e Risco**. 4ed. São Paulo: Atlas, 2002

REILLY, Frank K.; BROWN, Keith C. **Investiment Analysis and portfolio management**. 10h ed. Independence, KY: Cengage Learning 2011.

SHIRYAEV, A.N. **Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory**. Springer, 2011.

STEWART, Ian. **17 Equações que Mudaram o Mundo.** Zahar, 2013.

STEWART, James. **Cálculo**. Volume 1, 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

WILMOTT. Paul. **The Mathematics of Financial Derivatives**. Cambridge University Press, 1995.